Considerare i solidi di rotazione che si ottengono ruotando la figura indicata intorno all'asse dato. Di tali solidi si determini il volume, le coordinate del baricentro e l'area della superficie totale

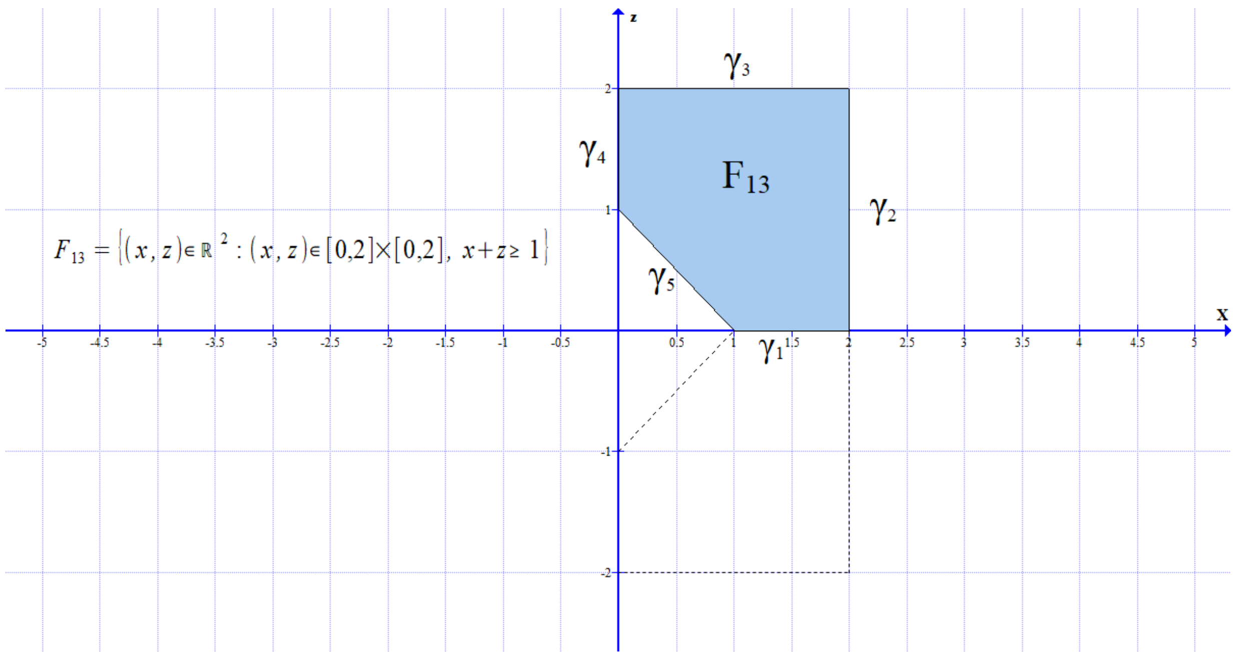
*** Esercizio 13 (*Ghisi, Gobbino*)

Sia data la figura F_{13} che ruota attorno all'asse x

$$F_{13} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x,z) \in [0,2] \times [0,2],\, x+z \geq 1\}$$

Soluzione dell'esercizio 13

Graficamente la figura F_{13} è così rappresentata



Applicando le formule generali per ricavare quanto richiesto, otteniamo per il solido di rotazione S_{13}

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(S_{13}) &= 2\pi \iint_{F_{13}} z\,dx\,dz = 2\pi \left\{ \int_0^1 dx \int_{1-x}^2 z\,dz + \int_1^2 dx \int_0^2 z\,dz \right\} \\
&= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4 - 1 - x^2 + 2x\right) + \frac{1}{2} \int_1^2 4\,dx \right\} \\
&= \pi \left\{ \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 + \Big[4x\Big]_1^2 \right\} = \pi\left(3 - \frac{1}{3} + 1 + 8 - 4\right) = \frac{23}{3}\pi
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il baricentro del solido S_{13}, per questioni di simmetria esso si troverà lungo l'asse di rotazione x e, pertanto, l'unica sua coordinata diversa da 0 sarà proprio $x_G(S_{13})$

$$\begin{aligned}
x_G(S_{13}) &= \frac{2\pi}{\text{Volume}(S_{13})} \iint_{F_{13}} xz\,dx\,dz = \frac{6}{23} \left\{ \int_0^1 x\,dx \int_{1-x}^2 z\,dz + \int_1^2 x\,dx \int_0^2 z\,dz \right\} \\
&= \frac{6}{23} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 x\left(4 - 1 - x^2 + 2x\right) dx + \frac{1}{2} \int_1^2 4x\,dx \right\} \\
&= \frac{3}{23} \left\{ \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \Big[2x^2\Big]_1^2 \right\} = \frac{3}{23}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 6\right) = \frac{95}{92}
\end{aligned}$$

Infine, anche per il calcolo della superficie totale del solido S_{13}, ci affidiamo alla formula generale

$$\text{Superficie}(S_{13}) = 2\pi \int_\gamma z\, ds$$

dove γ rappresenta la curva che circoscrive la figura F_{13} .

Parametrizziamo la curva γ nel modo seguente

$$\gamma_1(t) \,:\, \begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad 1 \le t \le 2$$

$$\gamma_2(t) \,:\, \begin{cases} x(t) = 2 \\ z(t) = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2$$

$$\gamma_3(t) \,:\, \begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = 2 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2$$

$$\gamma_4(t) \,:\, \begin{cases} x(t) = 0 \\ z(t) = t \end{cases} \qquad 1 \le t \le 2$$

$$\gamma_5(t) \,:\, \begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = 1 - t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

Abbiamo così che

$$\begin{aligned} \text{Superficie}(S_{13}) &= 2\pi \left\{ \int_0^2 t\, dt + \int_0^2 2\, dt + \int_1^2 t\, dt + \int_0^1 (1-t)\sqrt{2}\, dt \right\} \\ &= 2\pi \left\{ 2 + 4 + \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \right\} = 2\pi \left[6 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \pi(15 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$