Calcolare l'integrale triplo delle funzioni indicate sugli insiemi che soddisfano le relazioni date. Si raccomanda di svolgere ogni esercizio in almeno due modi, utilizzando varie combinazioni delle formule di riduzione. Si consiglia inoltre di sfruttare le eventuali simmetrie.

*** Esercizio 14 (*Ghisi, Gobbino*)

Siano date, sull'insieme $I_{14} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2 - x^2 - y^2 \geq z \geq 2x + 2y\}$, le seguenti funzioni: $f(x, y, z) = 1$ e $g(x, y, z) = x$

Soluzione dell'esercizio 14

Per considerazioni di carattere geometrico, essendo z compreso tra il paraboloide di equazione $z = 2 - x^2 - y^2$ ed il piano di equazione $z = 2x + 2y$, abbiamo che sull'insieme I_{14} è $0 \leq z \leq 2$

Dunque, per la funzione $f(x, y, z)$ abbiamo

$$\iiint_{I_{14}} dx\,dy\,dz \overset{*}{=} \int_0^2 dz \iint_{S_{14}} dx\,dy = 2 \iint_{S_{14}} dx\,dy$$

dove $*$ indica che $S_{14} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x - 2y \leq 2\}$

Adesso eseguiamo il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 1 \end{cases} \implies \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |1| = 1$$

ottenendo le seguenti trasformazioni

$$S_{14} \mapsto T_{14} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 \leq 4\}$$

$$2 \iint_{S_{14}} dx\,dy = 2 \iint_{T_{14}} du\,dv$$

passando infine a coordinate polari, segue che

$$T_{14} \mapsto P_{14} = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq \rho \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$2 \iint_{T_{14}} du\,dv = 2 \iint_{P_{14}} \rho\,d\rho\,d\theta = 2 \int_0^2 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \Big[\rho^2\Big]_0^2 = 8\pi$$