

ESEMPI MAX/MIN (PARAMETRIZZAZIONI)

$f(x, y) = xy$

$D = [-2, 2] \times [-2, 2]$

-2	2
-2	-2, -2) (2, 2)
2	(2, -2) (2, 2)

D è limitato

f è continua

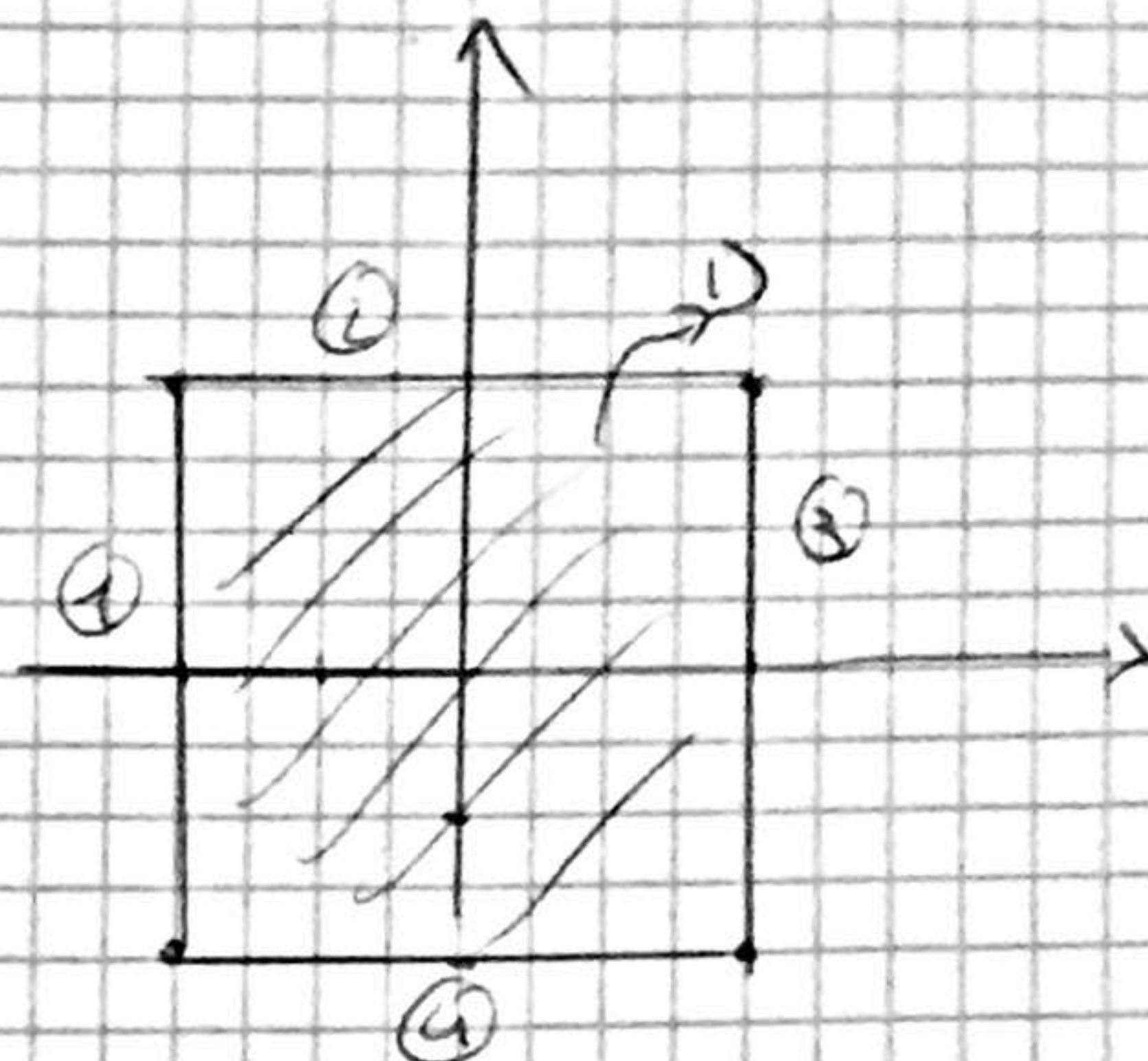
\downarrow W

\exists max/min

PUNTI STAZIONARI INTERNI

$\nabla f(x, y) = (y, x) = (0, 0)$

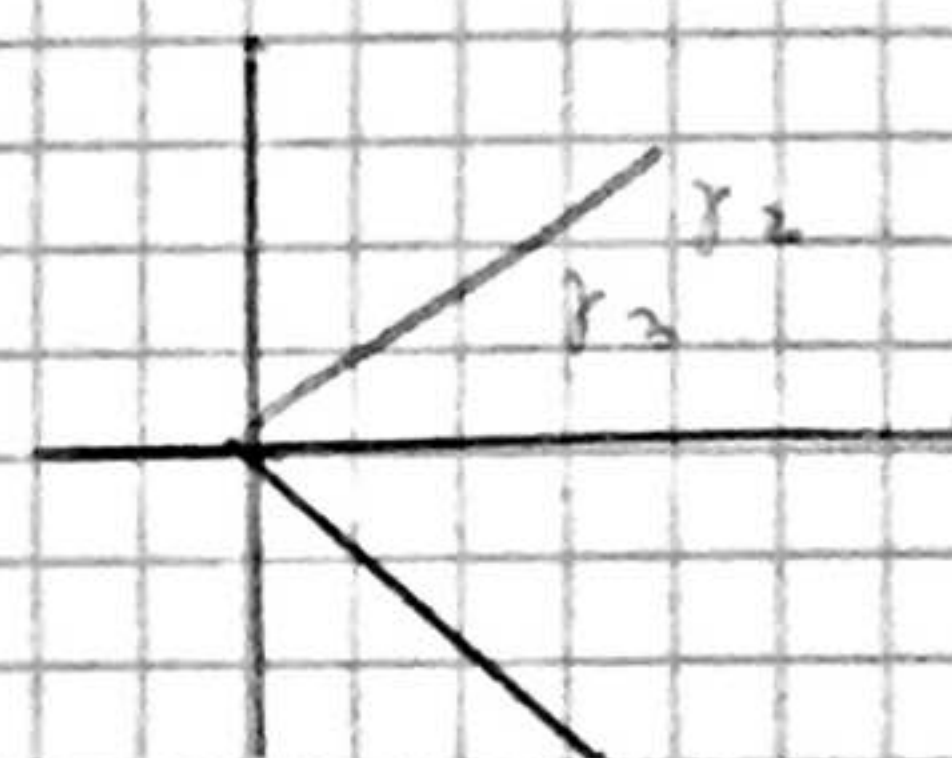
il punto $(0, 0)$ è stazionario interno



PARAMETRIZZAZIONE \rightarrow STUDIO IL BORDO FATTO DA 4 CURVE

$\gamma_1 = (-2, t) \quad f_{\gamma_1} = g_1(t) = -2t \quad \text{ha max in } (-2, -2) \text{ e min in } (-2, 2)$

$\gamma_2 = (t, 2) \quad f_{\gamma_2} = g_2(t) = 2t \quad 2 < t < 2$
 ha max $(2, 2)$ min $(-2, 2)$



$\gamma_3 = (2, t) \quad f_{\gamma_3} = g_3(t) = 2t$
 Stesso discorso max $(2, 2)$ min $(2, -2)$

$\gamma_4 = (t, -2) \quad f_{\gamma_4} = g_4(t) = -2t \quad \text{max in } (2, -2) \text{ min } (-2, -2)$

CANDIDATI MAX

$(-2, 2), (2, 2), (-2, -2), (2, -2) \quad f(\text{pt. max}) = 4$

CANDIDATI MIN

$(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2) \quad f(\text{pt. min}) = -4$

MAX MIN

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

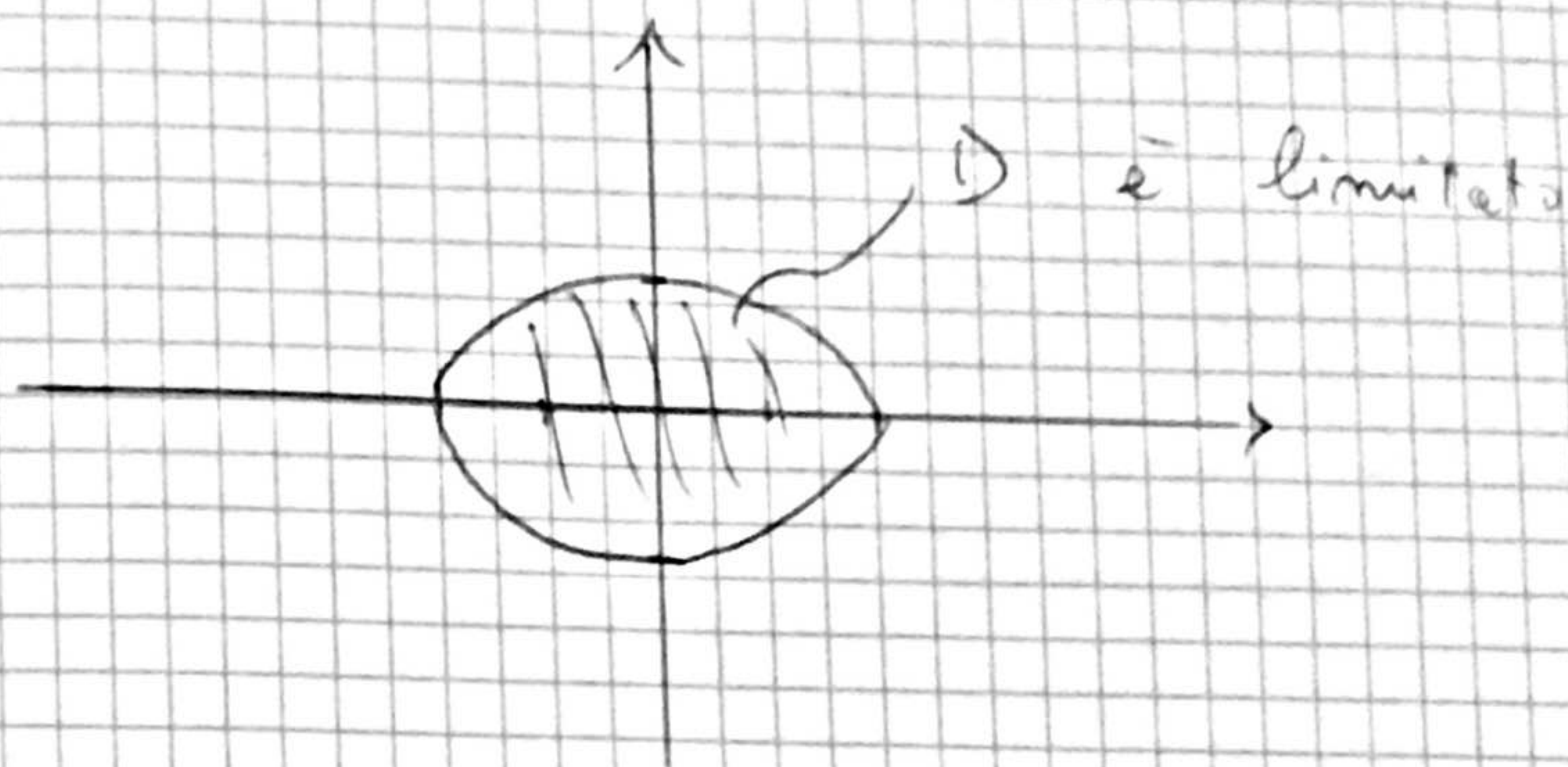
$$f(x, y) = xy$$

$$D = x^2 + 2y^2 \leq 4$$

D è limitato

f è continua

\Rightarrow \exists max/min



PUNTI STAZIONARI INTERNI

$\nabla f = (y, x) = (0, 0) \Rightarrow (0, 0)$ è un punto staz.

STUDIO IL BORDO \rightarrow uso ^{interno} moltiplicatori

PUNTI SINGOLARI

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= -y^2 \\ \rightarrow 4y + y^4 &= 0 \end{aligned}$$

non ha soluzioni

USO MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 4 \quad (3) \end{cases}$$

$$2\lambda = \frac{y}{x}$$

$$\rightarrow x^2 = 2y^2 \rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ che non soddisfa la (3)}$$

$$\rightarrow x^2 + x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$y = \pm 1$$

CANDIDATI MAX/MIN: $(-\sqrt{2}, -1)$ $(\sqrt{2}, 1)$ $(\sqrt{2}, -1)$ $(-\sqrt{2}, 1)$
max min min max

$$\max f = \sqrt{2}$$

2 punti di max

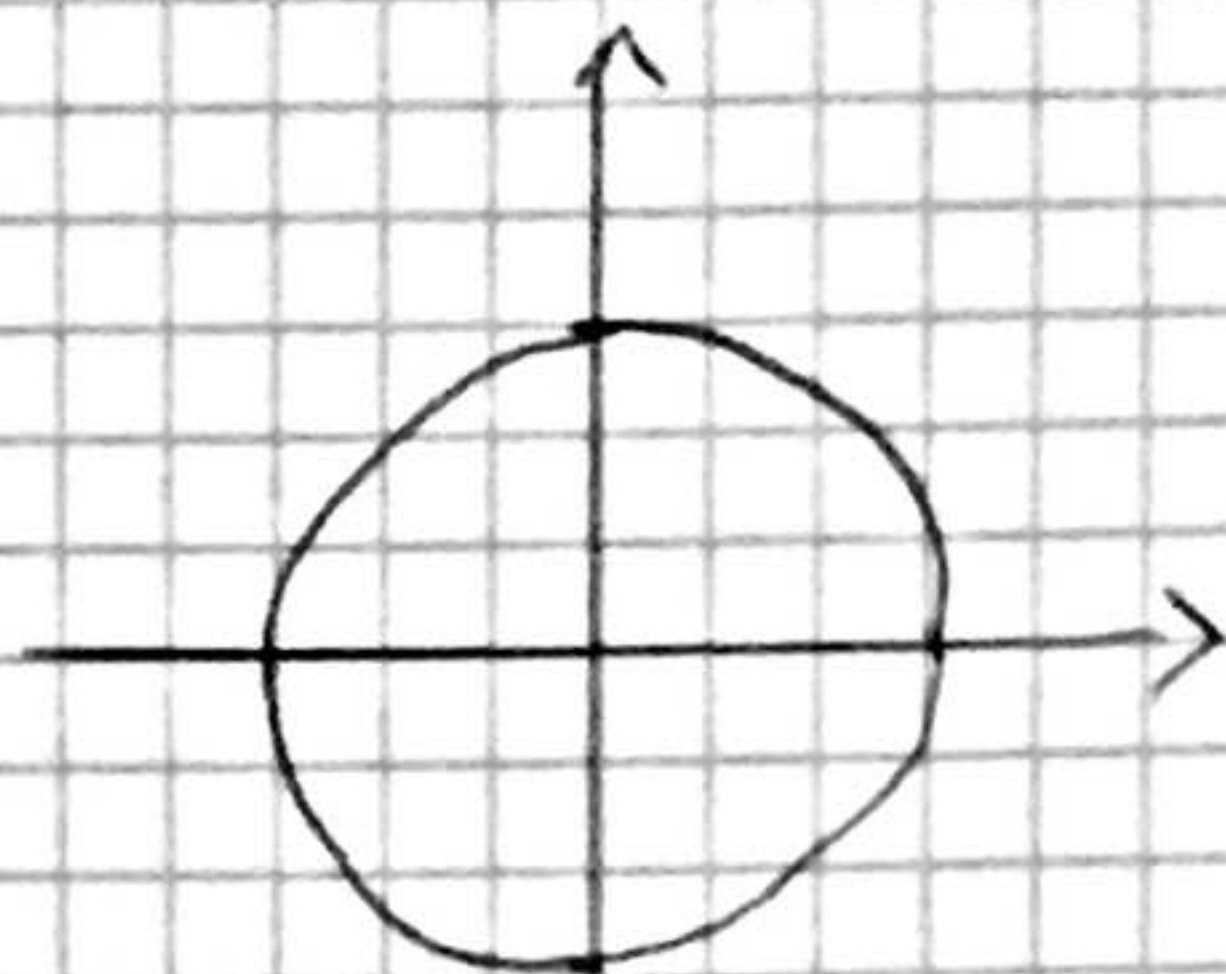
$$\min f = -\sqrt{2}$$

2 punti di min

$$f(x, y) = x + xy^2$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

D è limitato $\Rightarrow f$ ha max
 f è continua \Rightarrow e min



STUDIO IL BORDO: uso i moltiplicatori

PUNTI SINGOLARI

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{Non ci sono punti singolari}$$

MOLTI Moltiplicatori

$$\begin{cases} 1 + y^2 = 2\lambda x \\ 2xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad x = -1 \quad y = 0 \quad \text{No}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad x = 1 \quad y = 0 \quad \text{No}$$

$$\rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\max f = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \quad \text{2 maximum}$$

$$\min f = -\frac{4\sqrt{6}}{3} \quad \text{2 minimum}$$

ESERCIZIO B-G 37

$$f = x + y + z$$

$$x \in [0, 1] \rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$y \in [0, 2] \rightarrow 0 \leq y \leq 2$$

$$z \in [0, 3] \rightarrow 0 \leq z \leq 3$$

D sono limitati

$\Downarrow W$

I max/min f

PUNTI DI TAGLIO

Non ce ne sono

PUNTI SINGOLARI

non ci sono

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} y + z = \lambda \\ x + z = \lambda \\ y + x = \lambda \\ (x, y, z) \in D \end{cases}$$

$$y + z = x + z$$

$$\text{allora } y = x$$

$$2x = \lambda$$

$$x + z = 2x$$

$$x = z$$

$$(1, 1, 1) \rightarrow f = 3$$

$$f = 6 \text{ sup.}$$

$$(0, 0, 0) \rightarrow f = 0 \text{ inf.}$$

$$x, y, z = f(x, y, z)$$

$$D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \rightarrow \text{è la sfera} \Rightarrow \text{è limitata allora } \Rightarrow I \text{ max/min}$$

PUNTI DI TAGLIO:

non ce ne sono

PUNTI SINGOLARI:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

\Rightarrow non ci sono

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y - (x) = 2\lambda(x - y) \\ x = 2\lambda y \\ z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{se } x = y$$

$$y(2\lambda - 1) = 0 \rightarrow y = 0$$

no soluzioni

$$2\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 1$$

$$(0, 0, 1) \rightarrow f = 1$$

max

$$\text{se } z = -1$$

$$x = -y$$

$$z = -1$$

$$2x^2 + y^2 = x^2$$

$$x = 0$$

$$(0, 0, -1) \rightarrow f = -1$$

min

$$f(x, y, z) = x - y + 3z^2$$

$$D = \{ (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1) \} \rightarrow \text{è la sfera chiusa è limitato} \Rightarrow \exists \text{ max/min}$$

PUNTI DI TAGLIO \rightarrow non ci sono

PUNTI SINGOLARI:

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ 6z=0 \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 6z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{se } x \neq 0$$

$$2\lambda = 1/x \rightarrow y = -x$$

$$2x = z \rightarrow z \neq 0$$

$$z \neq 0 \rightarrow z^2 = 1 \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$2\lambda = 6$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + z^2 = 1$$

$$z^2 = \frac{17}{18} \rightarrow 2 \text{ punti di max}$$

$$f(\text{nel punto}) = \frac{19}{6}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

2 punti di min

$$f = -\sqrt{2}$$

$$f(x, y, z) = y + z - x^2$$

$$D = \{ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \} \rightarrow \text{è limitato} \quad |x| \leq 1 \quad |z| \leq 1$$

$$|y| \leq 1 \Rightarrow \exists \text{ max/min}$$

PUNTI DI TAGLIO

$$z=1 \Rightarrow D = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \} \rightarrow \text{è limitato} \Rightarrow \exists \text{ max e min}$$

$$f(x, y, 1) = y + 1 - x^2$$

\rightarrow punti staz. interni $\vec{\nabla} f = (1, 0, -2x) \neq (0, 0, 0)$ non ci sono

- BORDO \rightarrow no punti di taglio

\rightarrow punti singolari del bordo $\vec{\nabla} f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ NO SOLUZIONI

Moltiplicatori

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{se } x=0$$

$$y^2=1$$

$$\downarrow$$

$$(0, 1, 1) \leftarrow \text{Max } f=2$$

$$(0, -1, 1)$$

$$\text{se } x \neq 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$y = -1/2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Per $z \neq 1$

Punti singolari

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ -1=0 \end{cases} \quad \text{NO SOLUZIONI}$$

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = -1 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

$$\text{se } x=0$$

già visto

MINIMO

$$\text{se } x \neq 0 \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \leftarrow f = -\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \leftarrow f = -\frac{1}{4}$$