Calcolare l'integrale triplo delle funzioni indicate sugli insiemi che soddisfano le relazioni date. Si raccomanda di svolgere ogni esercizio in almeno due modi, utilizzando varie combinazioni delle formule di riduzione.

*** Esercizio 1 (*Ghisi, Gobbino*)

Sia data, sull'insieme $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq x^2\}$, la seguente funzione: $f(x, y, z) = \arctan(xy^2z^3)$

Soluzione dell'esercizio 1

Procediamo dividendo l'insieme D in due parti simmetriche rispetto l'asse y, A e B:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq x^2,\, x \geq 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq x^2,\, x \leq 0\}$$

Pertanto, l'integrale della funzione $f(x, y, z)$ diventa

$$\iiint_D \arctan(xy^2z^3)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A \arctan(xy^2z^3)\, dx\, dy\, dz + \iiint_B \arctan(xy^2z^3)\, dx\, dy\, dz$$

Per l'integrale sull'insieme B eseguiamo il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} x = -u \\ y = v \\ z = w \end{cases} \implies \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |-1| = 1$$

L'insieme B si trasforma così in

$$B \mapsto C = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,:\, u^2 + v^2 \leq 1,\, 0 \leq w \leq u^2,\, u \geq 0\} \overset{*}{=} A$$

e l'integrale su B diventa

$$\begin{aligned} \iiint_B \arctan(xy^2z^3)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_C \arctan(-uv^2w^3)\, du\, dv\, dw \overset{**}{=} -\iiint_C \arctan(uv^2w^3)\, du\, dv\, dw \\ &\overset{*}{=} -\iiint_A \arctan(xy^2z^3)\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

dove $*$ indica l'arbitrarietà nella scelta dei nomi delle variabili, mentre $**$ indica l'uso della disparità della funzione arcotangente.

Complessivamente, dunque, abbiamo che

$$\iiint_D \arctan(xy^2z^3)\, dx\, dy\, dz = 0$$