ESERCIZI SUI LIMITI ALL'INFINITO

palla centrata in 0

NOTA: $\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R$ $\underbrace{x^2+y^2 \geq R}$

$|f(x,y) - \ell| \leq \varepsilon$

* Non esistono limiti a $-\infty$.

ESEMPI

- $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x+y = \nexists$ $\qquad f(x,0) = x \begin{cases} \to +\infty & x \to +\infty \\ \to -\infty & x \to -\infty \end{cases}$

- Sia ora $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < x\}$

$$\underset{\downarrow x \to +\infty}{\underset{+\infty}{x}} \leq x+y < \underset{\downarrow \ \infty \ \ x \to +\infty}{2x}$$

Il limite è $+\infty$

- Sia ora $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \quad x \geq 0\}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x} \leq x+y \leq \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x+1}$$

il limite è $+\infty$ per il Teo dei 2 carabinieri

- Sia ora $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x+y \geq 1\}$

$1 \leq x+y$

$f(x, 1-x) \equiv 1$

$f(x,x) \equiv 2x \to +\infty$

$f(x,0) \equiv x \to +\infty$

Il limite non esiste

- Sia ora $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq x\}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \\ \text{per } x \to +\infty}}{x+\sqrt{x}} \leq x+y \leq \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \\ \text{per } x \to +\infty}}{2x}$$

Allora il limite è $+\infty$ per il Teo dei 2 CARABINIERI

- Sia infine $D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \\ \text{per } x \to +\infty}}{x} \leq x+y \leq \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \quad x \to +\infty}}{x+\frac{1}{x}}$$

• $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} xy = A$

$f(x,0) \equiv 0$

$f(x,x) \equiv x^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- Sia ora $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\}$

$0 \le xy \le x^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ Il limite non esiste

Ma $f(x,x) = x^2 \to +\infty$

$f(x,0) \equiv 0$

- Sia ora $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ x \ge 0\}$

$f(0,0) \equiv 0$ Il limite non esiste

$f(x,0) \equiv 0$

$f(x,1) = x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- Sia $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \ge 1\}$

$f(x,0) \equiv 0$

$f(0,y) \equiv 0$ Il limite non esiste.

$f(x,x) = x^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- Sia $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \le y \le x\}$

$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x\sqrt{x}} \le xy \le \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2}$ per $x \to +\infty$, $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ Per il Teo dei 2 carabinieri il limite è $+\infty$

• $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2+y^2-xy$

Uso le coordinate polari

$\rho^2(\overbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{1} - \overbrace{\cos\theta \sin\theta}^{\frac{1}{2}\sin 2\theta \ \ge \frac{1}{2}}]$

$\lim_{\substack{\rho \to \infty \\ 0 < \theta < 2\pi}} \rho^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \ge +\frac{1}{2}\rho^2 \underset{\rho \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

non mi è chiaro se hai capito, la stima vale solo con il segno - davanti

- $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\}$

$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2} \le x^2+y^2-xy \le \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}$

questo no, le disugualianze sono sbagliate

Il limite è $+\infty$

- Sia $D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 , x \ge 0 \}$

anche queste

$$x^2 \le x^2 + y^2 - xy \le x^2 + 1 - x$$

$x^2 \to +\infty$, $x^2 + 1 - x \to +\infty$ per $x \to +\infty$

Il limite è $+\infty$

- Sia $D_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \ge 1 \}$

qui non si legge nulla

- Sia $D_4 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \le y \le x \}$

Il limite è $+\infty$

$$x^2 + x - x\sqrt{x} \le x^2 + y^2 - xy \le x^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}$$

$\downarrow$ per $x \to +\infty$ $+\infty$ $\qquad$ $\downarrow$ per $x \to +\infty$ $+\infty$

Disugualianze sbagliate

- Sia $D_5 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 1 \quad 0 \le y \le \frac{1}{x} \}$

$$x^2 \le x^2 + y^2 - xy \le x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 \to +\infty$$

$x^2 \to +\infty$

Il limite è $+\infty$

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2 + y^2 - 2xy$ lo scrivo come $(x-y)^2$

$f(0, y) \equiv y^2 \to +\infty$

$f(x, 0) \equiv x^2 \to +\infty$

$f(x, x) \equiv 0$ il limite $\nexists$

- Sia $D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \}$

$$x^2 \le (x-y)^2 \le 0$$

$x^2 \to +\infty$

????

$f(x, 0) = x^2 \to +\infty$

$f(x, x) = 0$

il limite $\nexists$

- Sia $D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 , x \ge 0 \}$

Il limite è $+\infty$

$$x^2 \le (x-y)^2 \le x^2 + 1 - 2x$$

$x^2 \to +\infty$, $x^2 + 1 - 2x \to +\infty$

Disugualianze sbagliate

- Sia $D_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \ge 1 \}$

Le due curve del D_2 vanno bene

NMP CONTINUA

- Sia $D_4 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq x \}$

$(x-\sqrt{x})^2 \leq (x-y)^2 \leq (x-x)$???? Il limite non esiste

- Sia $D_5 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \geq 1 \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \}$

$$\underset{\downarrow +\infty}{x^2} \leq (x-y)^2 \leq \underset{\downarrow +\infty}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow \text{il limite è } +\infty$$

Disugualianza sbagliate

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2+y^2+3xy = \nexists$

$f(x,0) = x^2 \to +\infty$

$f(x,-x) = 2x^2 - 3x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ 0 \leq y \leq x}} x^2+y^2+3xy$

$$\underset{\downarrow +\infty}{x^2} \leq x^2+y^2+3xy \leq \underset{\downarrow +\infty}{x^2+x^2+3x^2}$$

Il limite è $+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ 0 \leq y \leq 1,\ x > 0}} x^2+y^2+3xy$

$$\underset{\downarrow +\infty}{x^2} \leq x^2+y^2+3xy \leq \underset{\downarrow +\infty}{x^2+1+3x}$$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x+y \geq 1}} x^2+y^2+3xy$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ \sqrt{x} \leq y \leq x}} x^2+y^2+3xy$

$$\underset{\downarrow +\infty}{x^2+x+3\sqrt{x}} \leq x^2+y^2+3xy \leq \underset{\downarrow +\infty}{x^2+x^2+3x^5}$$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x \geq 1,\ 0 \leq y < 1/x}} x^2+y^2+3xy$

$x^2 < x^2+y^2+3xy < x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$

Il limite è $+\infty$

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^4+y^4+xy$

$f(x,0) = x^4 \to +\infty$

$f(0,y) = y^4 \to +\infty$

$f(x,x) = 2x^4+x^2 \to +\infty$

Procedo con le coordinate polari

$$\rho^4 \underbrace{(\sin^4\theta + \cos^4\theta)} + \rho^2(\sin\theta\cos\theta) \geq c\rho^4 + \rho^2 \to \infty$$

$g(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta \geq c > 0 \to$ funzione continua strett > 0 su un compatto $\Rightarrow$ ha minimo > 0

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^4+y^4+xy$

$0 \leq y \leq x$

$x^4 \leq x^4+y^4+xy < x^4+x^4+x^2$

Il limite è $+\infty$

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^4+y^4+xy$

$0 \leq y \leq 1 \quad x \geq 0$

$x^4 \leq x^4+y^4+xy \leq x^4+1+x$

Il limite è $+\infty$

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^4+y^4+xy$

$\sqrt{x} \leq y \leq x$

$x^4+x^2+x\sqrt{x} < x^4+y^4+xy < x^4+x^4+x^2$

Il limite è $+\infty$