ESERCIZI SUI LIMITI ALL'INFINITO

NOTA: $\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists R$ $\underbrace{x^2+y^2 \geq R}$ palla centrata in 0

$|f(x,y) - \ell| \leq \varepsilon$

* Non esistono limiti a $-\infty$.

ESEMPI

- $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x+y = \nexists$ $\quad f(x,0) = x$ $\to +\infty$ per $x \to +\infty$; $\to -\infty$ per $x \to -\infty$

- Sia ora $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < x\}$

$x \leq x+y < 2x$

$x \to +\infty$ per $x \to +\infty$; $2x \to \infty$ per $x \to +\infty$

Il limite è $+\infty$

- Sia ora $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \quad x \geq 0\}$

$x \leq x+y \leq x+1$

$x \to +\infty$; $x+1 \to +\infty$

il limite è $+\infty$ per il teo dei 2 carabinieri

- Sia ora $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x+y \geq 1\}$

$1 \leq x+y$

$f(x, 1-x) \equiv 1$

$f(x,x) \equiv 2x \to +\infty$

$f(x,0) \equiv x \to +\infty$

Il limite non esiste

- Sia ora $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq x\}$

$x+\sqrt{x} \leq x+y \leq 2x$

$x+\sqrt{x} \to +\infty$ per $x \to +\infty$; $2x \to +\infty$ per $x \to +\infty$

Allora il limite è $+\infty$ per il teo dei 2 CARABINERI

- Sia infine $D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

$x \leq x+y \leq x+\frac{1}{x}$

$x \to +\infty$ per $x \to +\infty$; $x+\frac{1}{x} \to +\infty$ $x \to +\infty$

• $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} xy = \nexists$

$f(x,0) \equiv 0$

$f(x,x) \equiv x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- Sia ora $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\}$

$0 \le xy \le x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Ma $f(x,x) = x^2 \to +\infty$

$f(x,0) \equiv 0$

Il limite non esiste

- Sia ora $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, x \ge 0\}$

$f(0,0) \equiv 0$

$f(x,0) \equiv 0$

$f(x,1) = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Il limite non esiste

- Sia $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \ge 1\}$

$f(x,0) \equiv 0$

$f(0,y) \equiv 0$

$f(x,x) = x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Il limite non esiste.

- Sia $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \le y \le x\}$

$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x\sqrt{x}} \le xy \le \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2}$ per $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ Per il Teo dei 2 carabinieri il limite è $+\infty$

• $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2+y^2-xy$

Uso le coordinate polari

$\rho^2 (\overbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{1} - \overbrace{\cos\theta \sin\theta}^{\frac{1}{2}\sin 2\theta \ge \frac{1}{2}}]$

$\lim_{\substack{\rho\to\infty \\ 0<\theta<2\pi}} \rho^2(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta) \ge +\frac{1}{2}\rho^2 \underset{\rho\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\}$

$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2} \le x^2+y^2-xy \le \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}$

Il limite è $+\infty$

- Sia $D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x \geq 0 \}$

$$x^2 \leq x^2 + y^2 - xy \leq x^2 + 1 - x$$

$x^2 \to +\infty$, $x^2 + 1 - x \to +\infty$ per $x \to +\infty$

Il limite è $+\infty$

- Sia $D_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1 \}$

- Sia $D_4 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq x \}$

Il limite è $+\infty$

$$x^2 + x - x\sqrt{x} \leq x^2 + y^2 - xy \leq x^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}$$

$x^2 + x - x\sqrt{x} \to +\infty$ per $x \to +\infty$, $x^2 \to +\infty$ per $x \to +\infty$

- Sia $D_5 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \}$

$$x^2 \leq x^2 + y^2 - xy \leq x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 \to +\infty$$

$x^2 \to +\infty$

Il limite è $+\infty$

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2 + y^2 - 2xy$ lo scrivo come $(x-y)^2$

$f(0,y) \equiv y^2 \to +\infty$

$f(x,0) \equiv x^2 \to +\infty$

$f(x,x) \equiv 0$ il limite $\nexists$

- Sia $D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \}$

$$x^2 \leq (x-y)^2 \leq 0$$

$x^2 \to +\infty$

$f(x,0) = x^2 \to +\infty$

$f(x,x) = 0$

il limite $\nexists$

- Sia $D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x \geq 0 \}$

$$x^2 \leq (x-y)^2 \leq x^2 + 1 - 2x$$

$x^2 \to +\infty$, $x^2 + 1 - 2x \to +\infty$

Il limite è $+\infty$

- Sia $D_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1 \}$

CONTINUA

- Sia $D_4 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq x \}$

$(x-\sqrt{x})^2 \leq (x-y)^2 \leq (x-x)$ Il limite non esiste

- Sia $D_5 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \geq 1 \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \}$

$$\underbrace{x^2}_{\downarrow +\infty} \leq (x-y)^2 \leq \underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}_{\downarrow +\infty} \Rightarrow \text{il limite è } +\infty$$

- $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2+y^2+3xy = \nexists$

$f(x,0) = x^2 \to +\infty$

$f(x,-x) = 2x^2-3x^2 \to -\infty$ $x \to +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ 0 \leq y \leq x}} x^2+y^2+3xy$

$$\underbrace{x^2}_{\downarrow +\infty} \leq x^2+y^2+3xy \leq \underbrace{x^2+x^2+3x^2}_{\downarrow +\infty}$$

Il limite è $+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ 0 \leq y \leq 1,\ x>0}} x^2+y^2+3xy$

$$\underbrace{x^2}_{\downarrow +\infty} \leq x^2+y^2+3xy \leq \underbrace{x^2+1+3x}_{\downarrow +\infty}$$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x+y \geq 1}} x^2+y^2+3xy$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ \sqrt{x} \leq y \leq x}} x^2+y^2+3xy$

$$\underbrace{x^2+x+3\sqrt{x}}_{\downarrow +\infty} \leq x^2+y^2+3xy \leq \underbrace{x^2+x^2+3x^5}_{\downarrow +\infty}$$

- $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x \geq 1,\ 0 \leq y < 1/x}} x^2+y^2+3xy$

$x^2 < x^2+y^2+3xy < x^2+\frac{1}{x^2}+3$

Il limite è $+\infty$

- $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x^4+y^4+xy$

$f(x,0) = x^4 \to +\infty$

$f(0,y) = y^4 \to +\infty$

$f(x,x) = 2x^4+x^2 \to +\infty$

Procedo con le coordinate polari

$$\underbrace{\rho^4(\sin^4\theta + \cos^4\theta)}_{} + \rho^2(\sin\theta\cos\theta) \geq c\rho^4 + \rho^2 \to \infty$$

$g(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta \geq c > 0 \to$ funzione continua strett >0 su un compatto $\Rightarrow$ ha minimo >0

- $\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ 0 \leq y \leq x}} x^4+y^4+xy$

$x^4 \leq x^4+y^4+xy < x^4+x^4+x^2$

Il limite è $+\infty$

- $\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ 0 \leq y \leq 1 \quad x \geq 0}} x^4+y^4+xy$

$x^4 \leq x^4+y^4+xy \leq x^4+1+x$

Il limite è $+\infty$

- $\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ \sqrt{x} \leq y \leq x}} x^4+y^4+xy$

$x^4+x^2+x\sqrt{x} < x^4+y^4+xy < x^4+x^4+x^2$

Il limite è $+\infty$