Esercizio 1

Calcolare l'integrale doppio delle seguenti funzioni sugli insiemi indicati. Ovunque possibile, si consiglia di svolgere l'esercizio in due modi, utilizzando le due versioni della formula di riduzione.

Sia data la funzione $f(x,y) = \dfrac{\log(x+y)}{x+y}$ sugli insiemi $D_1 = [0,1] \times [1,2]$ e $D_2 = [1,2] \times [0,1]$

Soluzione dell'esercizio 1

Sull'insieme D_1 abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} \frac{\log(x+y)}{x+y}\,dx\,dy &= \int_1^2 dy \int_0^1 \frac{\log(x+y)}{x+y}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\Big[\log^2(x+y)\Big]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \big[\log^2(1+y) - \log^2(y)\big]\,dy \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{2}\Big[(1+y)\log(1+y)[\log(1+y)-2] + 2(1+y) - y\log(y)[\log(y)-2] - 2y\Big]_{y=1}^{y=2} \\
&= \frac{3}{2}\log^2(3) - 3\log(3) - \log^2(2) + 2\log(2) - \log^2(2) + 2\log(2) \\
&= \frac{3}{2}\log^2(3) - 2\log^2(2) + \log\Big(\frac{16}{27}\Big)
\end{aligned}$$

dove $*$ indica il seguente svolgimento:

$$\int \big[\log^2(1+y) - \log^2(y)\big]\,dy$$

Calcoliamo separatamente gli integrali dei due termini, cominciando dal secondo

$$\begin{aligned}
\int \log^2(y)\,dy &= \log(y)[y\log(y) - y] - \int \frac{y[\log(y)-1]}{y}\,dy = y\log(y)[\log(y)-1] + y - y\log(y) + y \\
&= \boxed{y\log(y)[\log(y)-2] + 2y}
\end{aligned}$$

Per l'integrale del primo termine poniamo $1 + y = u \implies dy = du$ e otteniamo

$$\int \log^2(1+y)\,dy = \int \log^2(u)\,du = u\log(u)[\log(u)-2] + 2u$$

da cui, tornando alla variabile y, segue che

$$\int \log^2(1+y)\,dy = \boxed{(1+y)\log(1+y)[\log(1+y)-2] + 2(1+y)}$$